La teoria delle code

Lezione 07

31 marzo 2015

Ing. Chiara Foglietta
foglietta.chiara@gmail.com

Sistemi di Controllo per l'Automazione Industriale
Ingegneria Gestionale
A.A. 2014 - 2015
Università degli Studi di Cassino e del Lazio Meridionale

Sistemi Semplici di Code
Reti di Code Aperte
Esercizi

Agenda

Sistemi Semplici di Code

Reti di Code Aperte

Esercizi

Sistema M/M/1 I

Una coda M/M/1 è fisicamente composta da un buffer e da un solo servitore; in essa il tempo di inter-arrivo tra due arrivi successivi e il tempo di servizio sono due variabili aleatorie markoviane, cioè con distribuzione esponenziale.
Il valore medio di interaarivo e il valore medio di servizio sono usualmente indicati con λ e μ, ossia

$$\lambda_n = \lambda, \qquad \mu_n = \mu$$

Sistema M/M/1 II

Il fattore di utilizzazione ρ esprime il rapporto tra il tempo medio di servizio e il tempo medio tra due arrivi, ossia

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Di conseguenza, la probabilità che nel sistema vi siano n clienti, è calcolata come

$$p_n = \rho^n(1-\rho), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

dove $p_0 = 1 - \rho$.
Il valore $\rho = 1 - p_0$ può essere interpretato anche come il tasso di occupazione del servitore, ovvero la frazione di tempo in cui il servitore lavora.

Sistema M/M/1 III

Il numero medio di clienti nel sistema è pari a

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

Il numero medio di utenti in attesa è pari a

$$\mathbb{E}[W] = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

Sistema M/M/m I

La coda M/M/m ha *m* serventi in parallelo ciascuno con tasso di servizio $1/\mu$.

$$\lambda_n = \lambda, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & 0 \leq n < m \\ m\mu, & n \geq m \end{cases}$$

Il fattore di utilizzazione ρ vale

$$\rho = \frac{\lambda}{m\mu}, \qquad 0 \leq \rho < 1$$

Sistema M/M/1/K I

Supponiamo ora che la coda sia limitata, ossia che il numero massimo di clienti che possono stare contemporaneamente nel sistema sia K.
Supponiamo inoltre che l'intervallo tra arrivi consecutivi sia esponenziale con parametro λ e che un cliente che al suo arrivo trovi il sistema pieno abbandoni il sistema cercando servizio altrove senza alterare la distribuzione degli arrivi. Tale fenomeno è chiamato *blocco* degli utenti.
Il modello del sistema è dato da:

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & 0 < n < K \\ 0 & n \geq K \end{cases}$$

$$\mu_m = \mu \qquad n = 1, 2, \ldots, K$$

Sistema M/M/1/K II

La probabilità che il servente sia inattivo e che quindi il sistema non abbia utenti

$$\pi_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{K} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]^{-1} = \frac{1 - \frac{\lambda}{\mu}}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1}}$$

La probabilità che il sistema abbia n utenti è pari a

$$\pi_n = \begin{cases} \pi_0 \rho^n & 0 \leq n \leq K \\ 0 & n > K \end{cases}$$

Sistema M/M/1/K III

L'utilizzazione del servente è data da $1 - \pi_0$. A differenza del sistema M/M/1, l'utilizzazione è dipendente dal parametro strutturale K, oltre a λ e μ.
Il volume di produzione del sistema dato dalla frequenza di partenze $\mu(1 - \pi_0)$, che è minore della frequenza degli arrivi λ, poichè alcuni utenti sono bloccati e quindi non saranno mai serviti.

Sistema M/M/1/K IV

La misura di prestazioni nel caso di sistemi a capacità finita è la probabilità che un nuovo utente sia bloccato, ossia l'utente è perso a causa del sistema pieno. Questa probabilità è

$$P_B = \pi_K = (1-\rho)\frac{\rho^K}{1-\rho^{K+1}}$$

Nella progettazione di sistemi a coda, un problema tipico è la selezione della capacità K tale che la probabilità di blocco sia inferiore ad un livello desiderabile p.

Sistema M/M/1/K V

La lunghezza media della coda è pari a

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{K} n\pi_n = \frac{\rho}{1-\rho^{K+1}} \left[\frac{1-\rho^K}{1-\rho} - K\rho^K \right]$$

Dalla legge di Little è possibile ottenere la frequenza di arrivi di utenti ammessi pari a $\lambda(1-\pi_K)$, che è inferiore a λ.

Reti di Code Aperte I

Il modello di Jackson (reti di code markoviane aperte) è definito nel modo seguente:

1. i clienti appartengono tutti alla stessa classe
2. la rete è composta di N nodi; l'i-esimo nodo corrisponde ad una coda singola con m_i servitori in parallelo
3. il tempo di servizio di ciascuno dei servitori del nodo i-esimo è una variabile aleatoria con funzione di densità di probabilità di tipo esponenziale, con parametro μ_i
4. in un certo numero di nodi della rete ha luogo un processo di arrivo di clienti dall'esterno; ciascuno di tali processi è un processo di Poisson; il processo degli arrivi al nodo i-esimo (se esiste) è caratterizzato dal parametro λ_i
5. i buffer delle linee di attesa hanno dimensione infinita
6. dopo aver completato il servizio presso il nodo i-esimo, un cliente può

Reti di Code Aperte II

- essere trasferito ad un altro nodo j con tempo di trasferimento nullo e probabilità $r_{i,j}$ ($r_{i,i}$ può essere $\neq 0$)
- uscire dal sistema con probabilità $r_{i,0}$

in questo modo è definito il *processo di instradamento* con i vincoli

$$\sum_{j=1}^{N} r_{i,j} + r_{i,0} = 1 \qquad i = 1, \ldots, N$$

7. tutti i processi stocastici (di arrivo, di servizio, di instradamento) corrispondono a sequenze di variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite; inoltre tali processi sono a due a due mutuamente indipendenti
8. la popolazione complessiva dei clienti è infinita.

Il processo complessivo degli arrivi al nodo i-esimo è un processo stocastico caratterizzato da una frequenza di arrivi Λ_i pari a

$$\Lambda_i = \lambda_i + \sum_{j=1}^{N} r_{i,j}\tilde{\Lambda}_j$$

dove $\tilde{\Lambda}_j$ è la frequenza media di uscite dal nodo j.

Reti di Code Aperte IV

In condizioni di equilibrio stocastico, il rate di arrivi medio in ingresso e quello in uscita sono identici per ogni nodo, ossia

$$\Lambda_i = \tilde{\Lambda}_i \qquad i = 1, \ldots, N$$

$$\Lambda_i = \lambda_i + \sum_{j=1}^{N} r_{i,j} \Lambda_j \qquad i = 1, \ldots, N$$

Il sistema di equazioni rappresenta il bilancio dei flussi e può essere risolto ottenendo il rate di arrivi medio ad ogni nodo. Inoltre, è evidente che il rate di arrivi medio ad un nodo corrisponde, in condizioni di equilibrio stocastico al flusso medio dei clienti nel nodo stesso.

Reti di Code Aperte V

Teorema di Jackson.
Sia data una rete di code aperta corrispondente al modello descritto. Si risolva il sistema determinando le quantità $\Lambda_i, i = 1, \ldots, N$. Se risulta che

$$\frac{\Lambda_i}{m_i \mu_i} < 1 \qquad \forall i = 1, \ldots, N$$

La distribuzione di probabilità dello stato a regime è data da

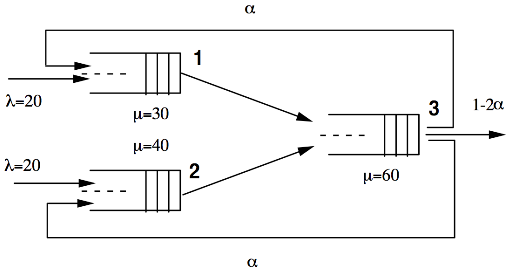
$$\pi(n_1, n_2, \ldots, n_N) = \pi_1(n_1)\pi_2(n_2) \ldots \pi_N(n_N)$$
$$\pi(n_1, n_2, \ldots, n_N) = Pr[L_1 = n_1, \ldots, L_N = n_N]$$

Avendo indicato con L_i il numero di clienti presenti nel nodo i-esimo. Inoltre, ciascuna delle distribuzione $\pi_i(n_i)$ è identica alla distribuzione di probabilità dello stato a regime di una coda $M/M/m_i$.

Reti di Code Aperte VI

Il teorema di Jackson ha il seguente significato in una rete di code aperta corrispondente al modello di Jackson, purché siano soddisfatte le condizioni (condizioni di stabilità), il sistema raggiunge una condizione di equilibrio stocastico in cui la distribuzione di probabilità congiunta è caratterizzata da una ”struttura prodotto”, cioè da una struttura tale da risultare prodotto di distribuzioni marginali (ognuna riferita ad un'unica variabile). Ovviamente, il calcolo della probabilità congiunta consente la determinazione di diversi indici di prestazione.

Essa rappresenta un sistema di lavorazione costituito da tre stazioni 1, 2, 3 ciascuna con un solo servente. Alle stazioni 1 e 2 arrivano pezzi con distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 20$ pezzi/ora. La stazione 3 è di ispezione e ne scarta una frazione pari a 2α, che viene instradata equamente alle due macchine. Le tre stazioni hanno tempi di servizio esponenziali con parametri $\mu_1 = 30$, $\mu_2 = 40$, $\mu_3 = 60$.



Problema n.1 II

Quale valore massimo può assumere α affinchè il sistema ammetta una distribuzione stazionaria di probabilità?

Innanzitutto si devono determinare le frequenze effettive degli arrivi alle varie stazioni ossia:

$$\begin{cases} \lambda_1' = \lambda_1 + \alpha\lambda_3' \\ \lambda_2' = \lambda_2 + \alpha\lambda_3' \\ \lambda_3' = \lambda_1' + \lambda_2' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1' & = 20 + \dfrac{40\alpha}{1-2\alpha} \\ \lambda_2' & = 20 + \dfrac{40\alpha}{1-2\alpha} \\ \lambda_3' & = \dfrac{40}{1-2\alpha} \end{cases}$$

Problema n.1 III

Questi valori vanno confrontati con i rispettivi μ_i imponendo che $\rho_i < 1$ ossia $\lambda'_i < \mu_i$

$$\begin{cases} \lambda'_1 = 20 + \dfrac{40\alpha}{1-2\alpha} & < \mu_1 = 30 \\ \lambda'_2 = 20 + \dfrac{40\alpha}{1-2\alpha} & < \mu_2 = 40 \\ \lambda'_3 = \dfrac{40}{1-2\alpha} & < \mu_3 = 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha & < 1/6 \\ \alpha & < 1/4 \\ \alpha & < 1/6 \end{cases}$$

Problema n.1 IV

Supponendo $\alpha = 0.1$, calcolare il valore atteso W del tempo trascorso nel sistema da un pezzo

Il tempo trascorso nel sistema per ogni sistema si ha

$$\mathbb{E}[S] = \frac{1}{\mu_i - \lambda_i'}$$

Applicando il valore $\alpha = 0.1$, si ottiene:

$$\begin{cases} \lambda_1' = 20 + \dfrac{4}{0.8} = 25 \\ \lambda_2' = 20 + \dfrac{4}{0.8} = 25 \\ \lambda_3' = \dfrac{40}{0.8} = 50 \end{cases}$$

Problema n.1 V

Applicando la regola dei tempi di trascorsi nel sistema si ha, espresso in ore:

$$\begin{cases} W_1 = \dfrac{1}{\mu_1 - \lambda_1'} = \dfrac{1}{5} = 0.2 \\ W_2 = \dfrac{1}{\mu_2 - \lambda_2'} = \dfrac{1}{15} = 0.067 \\ W_3 = \dfrac{1}{\mu_3 - \lambda_3'} = \dfrac{1}{10} = 0.1 \end{cases}$$

Problema n.1 VI

Questi valori non sono sufficienti per determinare il tempo atteso di un pezzo nel sistema. Una frazione dei pezzi $\lambda'_j / \sum \lambda$ provenienti dall'esterno visitano la macchina j.

$$\begin{cases} \dfrac{\lambda'_1}{\sum \lambda} = \dfrac{25}{40} = 0.625 \\ \dfrac{\lambda'_2}{\sum \lambda} = \dfrac{25}{40} = 0.625 \\ \dfrac{\lambda'_3}{\sum \lambda} = \dfrac{50}{40} = 1.25 \end{cases}$$

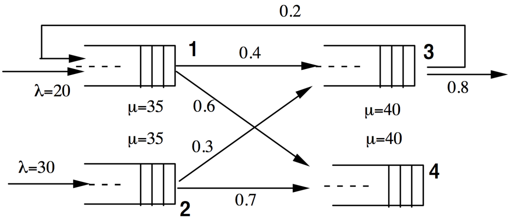
Si ottiene che

$$W = \sum_i W_i \frac{\lambda'_i}{\sum \lambda} =$$

$$0.2 \cdot 0.625 + 0.067 \cdot 0.625 + 0.1 \cdot 1.25 = 0.292$$

Problema n.2 I

Essa rappresenta un sistema di lavorazione costituito da quattro stazioni ciascuna con un solo servente. Il 20% dei pezzi lavorati dal centro 3 sono rimandati indietro al centro 1 per una rilavorazione. I centri 1 e 2 ricevono dall'esterno pezzi con distribuzione esponenziale di parametro $\lambda_1 = 20$ e $\lambda_2 = 30$ pezzi/ora rispettivamente. Le quattro stazioni hanno tempi di servizio esponenziali, di parametri rispettivamente $\mu_1 = \mu_2 = 35, \mu_3 = \mu_4 = 40$



Problema n.2 II

Il sistema ammette una distribuzione stazionaria di probabilità?

Innanzitutto si devono determinare le frequenze effettive degli arrivi alle varie stazioni ossia:

$$\begin{cases} \lambda'_1 = \lambda_1 + 0.2\lambda'_3 \\ \lambda'_2 = \lambda_2 \\ \lambda'_3 = 0.4\lambda'_1 + 0.3\lambda'_2 \\ \lambda'_4 = 0.6\lambda'_1 + 0.7\lambda'_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda'_1 = \lambda_1 + 0.2\lambda'_3 \\ \lambda'_2 = 30 \\ \lambda'_3 = 0.4\lambda'_1 + 9 \\ \lambda'_4 = 0.6\lambda'_1 + 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda'_1 = 23.69 \\ \lambda'_2 = 30 \\ \lambda'_3 = 18.48 \\ \lambda'_4 = 35.21 \end{cases}$$

Problema n.2 III

Questi valori vanno confrontati con i rispettivi μ_i imponendo che $\rho_i < 1$ ossia $\lambda'_i < \mu_i$

$$\begin{cases} \lambda'_1 = 23.69 < \mu_1 = 35 \\ \lambda'_2 = 30 < \mu_2 = 35 \\ \lambda'_3 = 18.48 < \mu_3 = 40 \\ \lambda'_4 = 35.21 < \mu_4 = 40 \end{cases}$$

Il sistema ammette una distribuzione stazionaria di probabilità.

Problema n.2 IV

In ingresso al centro di lavorazione 3, è situato un buffer di K posti. Qual è il valore minimo che K deve assumere affinchè la probabilità di ricorrere ad altre strutture sia inferiore all'1%?

La formula per il calcolo della probabilità che la stazione 3 abbia $K+1$ clienti è

$$\pi_{K+1} = (1-\rho_3)\frac{\rho_3^{K+1}}{1-\rho_3^{K+2}}$$

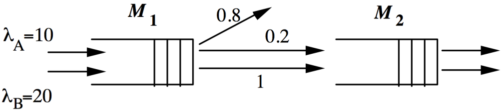
Problema n.2 V

dove $\rho_3 = \lambda'_3/\mu_3 = 18.48/40 = 0.462$. Quindi

$$\begin{aligned}
\pi_{K+1} = 0.538\frac{0.462^{K+1}}{1-0.462^{K+2}} &< 0.01 \\
(0.538 + 0.01 \cdot 0.462)0.462^{K+1} &< 0.01 \\
0.462^{K+1} &< 0.018 \\
(K+1)\ln 0.462 &< \ln 0.018 \\
K > 4.20 \rightarrow K &= 5
\end{aligned}$$

Problema n.3 I

Essa rappresenta un sistema di lavorazione costituito da due stazioni ciascuna con un solo servente. Due tipi di pezzi circolano nel sistema A e B. Tutti i pezzi di tipo A visitano il centro 1; dopodichè l'80% di tali pezzi esce dal sistema, mentre il 20% subisce una lavorazione aggiuntiva sul centro 2 dopo la quale esce dal sistema. Tutti i sistemi di tipo B visitano invece 1 e poi 2. Gli arrivi al sistema sono esponenziali con $\lambda_A = 10$pezzi /ora e $\lambda_B = 20$ pezzi/ora. I buffer sono infiniti. I valori attesi dei tempi di lavorazione sono espressi in minuti $\mu_{1,A} = 2.4$, $\mu_{1,B} = 1.2$, $\mu_{2,A} = 7.5$, $\mu_{2,B} = 2$



Problema n.3 II

Il sistema ammette una distribuzione stazionaria di probabilità?

Innanzitutto si devono determinare le frequenze effettive degli arrivi alle varie stazioni ossia $\lambda_1 = 30$ pezzi/ora e $\lambda_2 = 22$ pezzi/ora.
Si calcolano ora la frequenza media di servizio

$$\frac{1}{\mu_1} = \frac{10}{30} * 2.4 + \frac{20}{30} * 1.2 = 1.6$$
$$\frac{1}{\mu_2} = \frac{2}{22} * 7.5 + \frac{20}{22} * 2 = 2.5$$

Problema n.3 III

$$\mu_1 = 60/1.6 = 37.5$$
$$\mu_2 = 60/2.5 = 24$$

Questi valori vanno confrontati con i rispettivi μ_i e il sistema ammette una distribuzione stazionaria di probabilità.

Problema n.3 IV

Calcolare il valore atteso del tempo di permanenza nel sistema per un pezzo di tipo B.

Si deve calcolare

$$\mathbb{E}[S_B] = \mathbb{E}[W_1] - \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_{1B}} + \mathbb{E}[W_2] - \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_{2B}}$$

$$\mathbb{E}[S_B] = \frac{1}{\mu_1 - \lambda_1} - \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_{1B}} + \frac{1}{\mu_2 - \lambda_2} - \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_{2B}}$$

$$\mathbb{E}[S_B] = \frac{60}{37.5 - 30} - \frac{60}{37.5} + 1.2 + \frac{60}{24 - 22} - \frac{60}{24} + 2$$

$$\mathbb{E}[S_B] = 37.1$$

Problema n.4 I

Un impianto produttivo è costituito da tre centri di lavorazione, M_1, M_2, M_3. Le tre macchine sono organizzate in pipeline, ma i pezzi possono saltare alcune delle macchine. Il sistema è progettare per lavorare tre tipi di pezzi, A, BeC. Gli arrivi di ciascun tipo di pezzo sono esponenziali. Arrivano mediamente $\lambda_A = 20$ pezzi/giorno, $\lambda_B = 50$ pezzi/giorno e $\lambda_C = 10$ pezzi/giorno. I vari tipi di pezzi richiedono i tre centri di lavorazione con tempi di servizio diversi, espressi in minuti nella tabella

k	M_1	M_2	M_3		λ^k
A	5	-	10	100%	20
B	4	5	-	40%	50
	4	-	5	60%	
C	-	10	-	100%	10

Problema n.4 II

Si noti che il 40% dei pezzi di tipo B subiscono la seconda lavorazione su M_2, mentre il restante 60% su M_3. In base a questi dati, e considerando che un giorno è composto da 8 ore lavorative, calcolare

Qual è il collo di bottiglia, ossia la macchina avente la più elevata utilizzazione

Si comincia calcolando le frequenze effettive di arrivi alle diverse macchine:

$$\lambda_1' = 20 + 50 = 70 pz/giorno = 0.1458 pz/minu$$
$$\lambda_2' = 50 * 0.4 + 10 = 30 pz/giorno = 0.0625 pz/min$$
$$\lambda_3' = 20 + 50 * 0.6 = 50 pz/giorno = 0.1042 pz/min$$

Problema n.4 III

Si calcolano i valori delle frequenze $1/\mu_i$ di servizio per ogni servente

$$\frac{1}{\mu_1} = \frac{\lambda_A}{\lambda'_1}\mu_{1A} + \frac{\lambda_B}{\lambda'_1}\mu_{1BA} = \frac{20}{70}5 + \frac{50}{70}4 = 4.285 min$$
$$\frac{1}{\mu_2} = \frac{\lambda_B 0.4}{\lambda'_2}\mu_{2B} + \frac{\lambda_C}{\lambda'_2}\mu_{2C} = \frac{20}{30}5 + \frac{10}{30}10 = 6.667 min$$
$$\frac{1}{\mu_3} = \frac{\lambda_A}{\lambda'_3}\mu_{3A} + \frac{\lambda_B 0.6}{\lambda'_3}\mu_{3B} = \frac{20}{50}10 + \frac{30}{50}5 = 7 min$$

che corrisponde a $\mu_1 = 0.2334$ pz/minuto, $\mu_2 = 0.15$ pz/minuto e $\mu_3 = 0.1429$ pz/minuto.

Problema n.4 IV

Si deve calcolare l'utilizzazione di ogni macchina

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1'}{\mu_1} = \frac{0.1458}{0.2334} = 0.6247$$
$$\rho_2 = \frac{\lambda_2'}{\mu_2} = \frac{0.0625}{0.15} = 0.4167$$
$$\rho_3 = \frac{\lambda_3'}{\mu_3} = \frac{0.1042}{0.1429} = 0.7292$$

La macchina 3 è quella più utilizzata e quindi il collo di bottiglia del sistema

Problema n.4 V

Il valore atteso del tempo di attraversamento di un pezzo di tipo B.

Bisogna calcolare i valori attesi dei tempi trascorsi mediamente in coda dai pezzi nelle varie stazioni:

$$\mathbb{E}[S_B] = \mathbb{E}[W_1] - \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_{1B}} + 0.4\left(\mathbb{E}[W_2] - \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_{2B}}\right) + 0.6\left(\mathbb{E}[W_3] - \frac{1}{\mu_3} + \frac{1}{\mu_{3B}}\right)$$

$$\mathbb{E}[S_B] = \frac{1}{\mu_1 - \lambda_1'} - \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_{1B}} + 0.4\left(\frac{1}{\mu_2 - \lambda_2'} - \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_{2B}}\right) + 0.6\left(\frac{1}{\mu_3 - \lambda_3'} - \frac{1}{\mu_3} + \frac{1}{\mu_{3B}}\right)$$

Problema n.4 VI

$$\mathbb{E}[S_B] = \frac{1}{0.2334 - 0.1458} - \frac{1}{0.2334} + 4 + 0.4\left(\frac{1}{0.15 - 0.0625} - \frac{1}{0.15} + 5\right) + 0.6\left(\frac{1}{0.1429 - 0.1042} - \frac{1}{0.1429} + 5\right)$$

$$\mathbb{E}[S_B] = 7.1310 + 4 + 0.4(4.7619 + 5) + 0.6(18.8419 + 5) = 29.34 \ min$$