Esercitazione di
Sistemi di Controllo per l'Automazione Industriale
Ingegneria Gestionale
Maggio 2014

Esercizio sulle reti di code.

Si consideri il sistema descritto nella figura sottostante, costituito da 9 stazioni. Tutte le stazioni sono costituite da 1 solo servente.

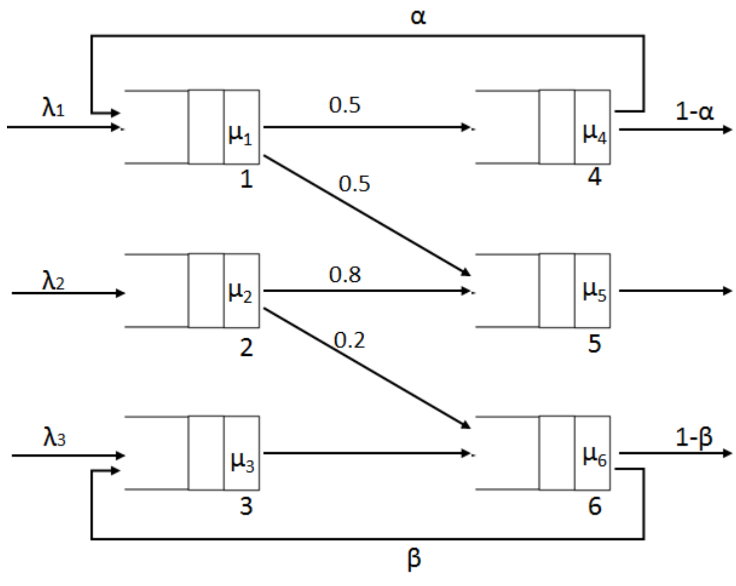
Le stazioni 7 e 9 sono stazioni di ispezione, controllano i pezzi completati e ne scartano rispettivamente α e β.

Le stazioni 1, 2 e 3 ricevono pezzi dall'esterno con distribuzioni esponenziali, rispettivamente, con parametri

$$\lambda_1 = 30\frac{pezzi}{ora}, \lambda_2 = 24\frac{pezzi}{ora}, \lambda_3 = 2\frac{pezzo}{minuto}.$$

I buffer sono infiniti. I valori attesi dei tempi di lavorazione sono espressi in minuti e sono:

$$\mu_1 = 20, \mu_2 = 0.5, \mu_3 = 4, \mu_4 = 30, \mu_5 = 0.75, \mu_6 = 4$$



Calcolare

1. Quale valore massimo possono assumere α e β affinché il sistema ammetta una distribuzione stazionaria di probabilità?
2. Supponendo $\alpha = 0.5$ e $\beta = 0.25$, calcolare il valore atteso W del tempo trascorso nel sistema da un pezzo.

Soluzione dell'esercizio

Si comincia con il determinare le frequenze effettive degli arrivi alle varie stazioni, ossia:

$$\begin{cases} \lambda_1' = \lambda_1 + \alpha\lambda_4' \\ \lambda_2' = \lambda_2 \\ \lambda_3' = \lambda_3 + \beta\lambda_6' \\ \lambda_4' = 0.5\lambda_1' \\ \lambda_5' = 0.5\lambda_1' + 0.8\lambda_2' \\ \lambda_6' = 0.2\lambda_2' + \lambda_3' \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda_1' = \lambda_1 + \alpha\lambda_4' \\ \lambda_2' = \lambda_2 \\ \lambda_3' = \lambda_3 + \beta\lambda_6' \\ \lambda_4' = 0.5\lambda_1 + 0.5\alpha\lambda_4' \\ \lambda_5' = 0.5\lambda_1' + 0.8\lambda_2 \\ \lambda_6' = 0.2\lambda_2 + \lambda_3 + \beta\lambda_6' \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda_1' = \dfrac{1}{1-0.5\alpha}\lambda_1 \\ \lambda_2' = \lambda_2 \\ \lambda_3' = \dfrac{0.2\beta}{1-\beta}\lambda_2 + \dfrac{1}{1-\beta}\lambda_3 \\ \lambda_4' = \dfrac{0.5}{1-0.5\alpha}\lambda_1 \\ \lambda_5' = \dfrac{0.5}{1-0.5\alpha}\lambda_1 + 0.8\lambda_2 \\ \lambda_6' = \dfrac{0.2}{1-\beta}\lambda_2 + \dfrac{1}{1-\beta}\lambda_3 \end{cases}$$

Usando i parametri delle distribuzioni degli arrivi

$$\lambda_1 = 30\frac{pezzi}{ora}, \lambda_2 = 24\frac{pezzi}{ora}, \lambda_3 = 2\frac{pezzo}{minuto}$$

E trasformandoli in minuti si ottiene

$$\lambda_1 = 0.5\frac{pezzi}{minuto}, \lambda_2 = 0.4\frac{pezzi}{minuto}, \lambda_3 = 2\frac{pezzo}{minuto}$$

Sostituendoli si ottiene

$$\begin{cases} \lambda_1' = \dfrac{1}{1-0.5\alpha}\lambda_1 = \dfrac{0.5}{1-0.5\alpha} \\ \lambda_2' = \lambda_2 = 0.4 \\ \lambda_3' = \dfrac{0.2\beta}{1-\beta}\lambda_2 + \dfrac{1}{1-\beta}\lambda_3 = \dfrac{0.08\beta+1}{1-\beta} \\ \lambda_4' = \dfrac{0.5}{1-0.5\alpha}\lambda_1 = \dfrac{0.25}{1-0.5\alpha} \\ \lambda_5' = \dfrac{0.5}{1-0.5\alpha}\lambda_1 + 0.8\lambda_2 = \dfrac{0.25}{1-0.5\alpha} + 0.32 \\ \lambda_6' = \dfrac{0.2}{1-\beta}\lambda_2 + \dfrac{1}{1-\beta}\lambda_3 = \dfrac{0.08+1}{1-\beta} \end{cases}$$

Questi valori vanno confrontati con i rispettivi valori μ_i, verificando che $\lambda_i' < \mu_i$

$$\begin{cases} \lambda_1' = \dfrac{0.5}{1-0.5\alpha} < \mu_1 = 20 \\ \lambda_2' = \lambda_2 = 0.4 < \mu_2 = 0.5 \\ \lambda_3' = \dfrac{0.08\beta+2}{1-\beta} < \mu_3 = 4 \\ \lambda_4' = \dfrac{0.25}{1-0.5\alpha} < \mu_4 = 30 \\ \lambda_5' = \dfrac{0.25}{1-0.5\alpha} + 0.32 < \mu_5 = 0.75 \\ \lambda_6' = \dfrac{0.08\beta+2}{1-\beta} < \mu_6 = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0.5 < 20 - 10\alpha \\ 0.25 < 30 - 15\alpha \\ 1 - 0.5\alpha > 0 \\ 0.25 + 0.32 - 0.16\alpha < 0.75 - 0.375\alpha \\ 0.08\beta + 2 < 4 - 4\beta \\ 1 - \beta > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha < 1.95 \\ \alpha < 1.98 \\ \alpha < 2 \\ \alpha < 0.8372 \\ \beta < 0.49 \\ \beta < 1 \end{cases}$$

Affinchè il sistema sia stazionario, si ha che $\alpha < 0.83$ e $\beta < 0.49$.

Il tempo trascorso nel sistema per ogni pezzo si ha che

$$\mathbb{E}[S] = \frac{1}{\mu_i - \lambda_i'}$$

Applicando i valori $\alpha = 0.5$ e $\beta = 0.25$, si ottengono le frequenze effettive ai diversi nodi

$$\begin{cases} \lambda_1' = \dfrac{0.5}{1 - 0.5\alpha} = \dfrac{0.5}{0.75} = 0.67 \\ \lambda_2' = 0.4 \\ \lambda_3' = \dfrac{0.08\beta + 2}{1 - \beta} = 2.69 \\ \lambda_4' = \dfrac{0.25}{1 - 0.5\alpha} = 0.33 \\ \lambda_5' = \dfrac{0.25}{1 - 0.5\alpha} + 0.32 = 0.65 \\ \lambda_6' = \dfrac{0.08\beta + 2}{1 - \beta} = 2.69 \end{cases}$$

Applicando la regola dei tempi trascorsi nel sistema si ha

$$\begin{cases} W_1 = \dfrac{1}{\mu_1 - \lambda_1'} = \dfrac{1}{20 - 0.67} = 0.0517 \\ W_2 = \dfrac{1}{\mu_2 - \lambda_2'} = \dfrac{1}{0.5 - 0.4} = 10 \\ W_3 = \dfrac{1}{\mu_3 - \lambda_3'} = \dfrac{1}{4 - 2.69} = 0.7634 \\ W_4 = \dfrac{1}{\mu_4 - \lambda_4'} = \dfrac{1}{30 - 0.33} = 0.0337 \\ W_5 = \dfrac{1}{\mu_5 - \lambda_5'} = \dfrac{1}{0.75 - 0.65} = 10 \\ W_6 = \dfrac{1}{\mu_6 - \lambda_6'} = \dfrac{1}{4 - 2.69} = 0.7634 \end{cases}$$

Si calcolano ora la frazione dei pezzi provenienti dall'esterno che visitano ogni macchina

$$\begin{cases} \dfrac{\lambda_1'}{\sum\lambda} = \dfrac{0.67}{2.9} = 0.231 \\ \dfrac{\lambda_2'}{\sum\lambda} = \dfrac{0.4}{2.9} = 0.1379 \\ \dfrac{\lambda_3'}{\sum\lambda} = \dfrac{2.69}{2.9} = 0.9276 \\ \dfrac{\lambda_4'}{\sum\lambda} = \dfrac{0.33}{2.9} = 0.1138 \\ \dfrac{\lambda_5'}{\sum\lambda} = \dfrac{0.65}{2.9} = 0.2241 \\ \dfrac{\lambda_6'}{\sum\lambda} = \dfrac{2.69}{2.9} = 0.9276 \end{cases}$$

Si ottiene che

$$W = \sum_i W_i \frac{\lambda_i'}{\sum \lambda} = 0.0517 \cdot 0.231 + 10 \cdot (0.1379 + 0.2241) + 0.7634 \cdot 0.9276 + 0.0337 \cdot 0.1138$$
$$+ 0.7634 \cdot 0.9276 = 5.052$$